17/12/18

**Ορισμός:** (Παράγωγος κατά κατεύθυνση)
$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$ και $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$. Το όριο $\frac{\partial}{\partial \bar{v}} f(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}$ ονομάζεται

παράγωγος κατά κατεύθυνση $\bar{v}$ στο $\bar{x}$

**Παρατήρηση:** α) Για $\bar{v} = \bar{e_i} = (0, \dots, \underset{\uparrow \, i\text{-θέση}}{1}, \dots, 0)$,

$\forall i = 1, \dots, n: \frac{\partial}{\partial \bar{e_i}} f(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x})$

β) $\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+ha\bar{v}) - f(\bar{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(\bar{x}+ha\bar{v}) - f(\bar{x})}{ha = h'} \right) a =$

$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(\bar{x}+h'\bar{v}) - f(\bar{x})}{h'} \right) a = \frac{a \partial f}{\partial v}$ $(a \neq 0)$

Αυτό σημαίνει ότι, όπως και σε συνήθη μας γραφή, για να μας δίνει η παράγωγος κάτι μεταβλητής, για να μας δίνει η παράγωγος κάτι ουσιαστικό (αναλλοίωτο), θα πρέπει το $\bar{v}$ να είναι κανονικοποιημένο. (Έτσι, το $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, μας δίνει

την κλίση της εφαπτομένης της $f|\{\bar{x}+\lambda\bar{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ στο σημείο $\bar{x}$)

**Θεώρημα:** $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$ και $f$ διαφ/μη, τότε: (Θεώρημα - όχι ορισμός)

$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = Df(\bar{x}) \cdot \bar{v}$

→

Απόδειξη (Άσκηση): Θεωρούμε την καμπύλη της ευθείας $\{\bar{x}+\lambda\bar{v}, \lambda\in\mathbb{R}\}$ σε ένα τμήμα της που είναι ολόκληρο μέσα στο $U$ (έτσι ώστε η $f$ να ορίζεται σε αυτό). Αφού $U$ ανοιχτό, $\exists\, \varepsilon>0$, $B(\bar{x},\varepsilon)\subset U$. Τότε, $\bar{x}+h\bar{v}\in B(\bar{x},\varepsilon)\subset U, \forall h\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.
Η καμπύλη (ευθ. τμήμα) είναι η $\bar{g}(h)=\bar{x}+h\bar{v}$ με $\bar{g}'(h)=\bar{v}$ (βλ. καμπύλες) με αυτή τη συνθήκη έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h\bar{v})-f(\bar{x})}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{g}(h))-f(\bar{g}(0))}{h}=(f\circ g)'(0)$$

$$\underset{\mathbb{R}}{h}\mapsto \underset{\mathbb{R}}{\bar{g}(h)}\mapsto \underset{\mathbb{R}}{f(\bar{g}(h))}=\underset{\mathbb{R}}{(f\circ\bar{g})(h)}$$

Από την άλλη, από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$(f\circ\bar{g})'(0)=D(f\circ\bar{g})(0)=\underbrace{Df(\underbrace{\bar{g}(0)}_{=x})}_{=\nabla f(\bar{x})}\,\underbrace{D\bar{g}(0)}_{=\bar{g}'(0)=\bar{v}\in\mathbb{R}^{n\times 1}}$$

Παρατήρηση (γεωμετρική ερμηνεία) Έστω $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^2$, ανοιχτό, $(x_0,y_0)\in U$, $f$ διαφ/μη στο $(x_0,y_0)$ και έστω η ~~...~~ τομή καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, που προκύπτει από την τομή του γραφήματος της $f$ με το επίπεδο κάθετα στο $Oxy$ που περιέχει την ευθεία $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, $h\in\mathbb{R}$

Η καμπύλη αυτή στον $\mathbb{R}^3$, είναι η $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+hv_1\\y_0+hv_2\\f(x_0+hv_1,y_0+hv_2)\end{pmatrix}=\gamma(h)$

$h\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$
και είναι διαφ/μη με παράγωγο:

$$D\gamma(\bar{0})=\gamma'(0)=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\Df(x_0,y_0)\cdot\bar{v}\end{pmatrix}=J\gamma(0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)-\gamma(0)}{h}$$

(*) και άρα περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f$ στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

(Το ότι η $\bar\gamma$ είναι διαφ/μη στο $\bar 0$ ισχύει, αφού $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\bar\gamma(h)-\bar\gamma(0)-\bar\gamma'(0)}{h}$
lim

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{\gamma_1(h)-\gamma_1(0)-v_1h}{h}=0$, αντίστοιχα για $\gamma_2$, και

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+hv_1,y_0+hv_2)-f(x_0,y_0)-Df(x_0,y_0)\bar v}{\|\bar u\|=\|h\bar v\|}\right|=0$$ (βλ. επεξ ~~lim~~

$$\lim_{(u_1,u_2)\to\bar 0(0,0)}\frac{f(x_0+u_1,y_0+u_2)-f(x_0,y_0)-Df(x_0,y_0)\cdot\bar u}{\|\bar u\|}=0 \Leftrightarrow$$

η $f$ διαφ/μη στο $(x_0,y_0)$, δηλ. η καμπύλη $\bar\gamma(h)$ έχει στο σημείο $\bar 0$, εφαπτόμενο δίσμα ~~δηλ. η καμπύλη $\bar\gamma(h)$~~ το $\bar\gamma'(0)=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ Df(x_0,y_0)\cdot\bar v\end{pmatrix}$ και άρα η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))=\bar\gamma(0)$ της καμπύλης είναι η $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix}+hv_1\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix}+hv_2\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

(*)

Παρατήρηση: Από την ανισότητα $\overset{C-S}{\text{Caushy - Swartz}}$ προκύπτει ότι αν $\nabla f(\bar x)\neq\bar 0$, η $f$ έχει τη μεγαλύτερη (αριθμητικά, αφού $\in\mathbb{R}$) παράγωγο κατά κατεύθυνση στην κατεύθυνση της κλίσης της $f$ δηλ. στην κατεύθυνση $\bar v=\frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}$ η οποία είναι η (παράγωγος κατά κατεύθυνση)

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar v}}_{=\frac{\partial f}{\partial \frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}}}(\bar x)=\|\nabla f(\bar x)\|$$

[ Πράγματι, αν CS: $\underbrace{|\nabla f(\bar x)\cdot\bar v|}_{=\frac{\partial f}{\partial\bar v}(\bar x)}\leq\|\nabla f(\bar x)\|\,\overbrace{\|\bar v\|}^{=1}$ και για

$f$: διαφορ. $\bar v=\frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}$ έχουμε $\nabla f(\bar v)\cdot\bar v=\nabla f(\bar x)\cdot\frac{\nabla f(\bar x)}{\|\nabla f(\bar x)\|}=\|\nabla f(\bar x)\|$

Αυτό το φαινόμενο το εκφράζουμε ως εξής: στο σημείο $\bar{x}$ η $f$ παρουσιάζει τον μεγαλύτερο αριθμό (rate) μεταβολής στην κατεύθυνση της κλίσης και ο ρυθμός αυτός είναι η νόρμα της κλίσης

(Τελευταία, ιδιότητα της κατεύθ. παραγ.:)

• Η κλίση μιας διαφ. συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$ στο $\bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ ($U$ ανοιχτό) είναι «κάθετη στο σύνολο στάθμης $f(\bar{x})$ της $f$ στο $\bar{x}$»:

κλίση της $f$ στο $\bar{x}$: $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ (όχι στο $\mathbb{R}^{n+1}$ που βρίσκεται το γράφημα)

«κάθετη στο σύνολο στάθμης $f(\bar{x})$ στο $\bar{x}$»

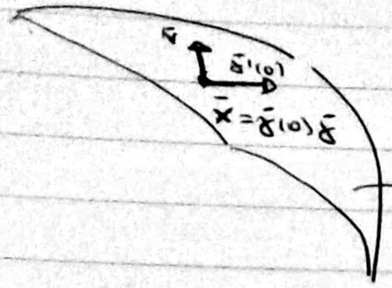
$L_f(\underbrace{f(\bar{x})}_{=c}) = \{ \bar{y} \in U : f(\bar{y}) = c \ (= f(\bar{x})) \}$

Έστω $\bar{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to L_f(f(\bar{x}))$ με $\bar{\gamma}(0) = \bar{x}$

[π.χ. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τότε με $c = f(x_0, y_0)$, το σύνολο στάθμης $c$ είναι το σύνολο $L_f(c) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = f(x_0,y_0) = x_0^2 + y_0^2 \}$]

Ισχυριζόμαστε ότι το $\nabla f(\bar{x})$ είναι κάθετο στο $\bar{\gamma}'(0)$ δηλ. στο εφαπτ. διάνυσμα της καμπύλης $\bar{\gamma}$ στο σημείο $\bar{\gamma}'(0)$ δηλ. $\bar{\gamma}'(0) \cdot \nabla f(\bar{x}) = 0$

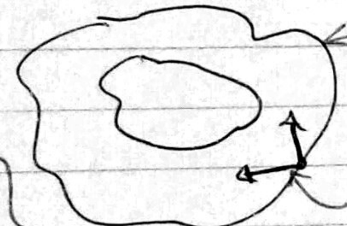
Πράγματι, αφού $\bar{\gamma}(t) \in L_f(f(\bar{x})) \Rightarrow f(\bar{\gamma}(t)) = c$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$




σύνολο στάθμης

$$f(\bar{\gamma}(t)) = (f\circ\bar{\gamma})(t) = g = c \Rightarrow g'(t)=0=(f\circ\bar{\gamma})'(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f\circ\bar{\gamma})'(0) = 0 = \nabla f = g$$
$$= Df(\bar{\gamma}(0))\,\underbrace{\bar{\gamma}'(0)}_{\bar{x}}$$

Πρακτικό δίδαγμα: Περπατάτε στην πλαγιά ενός βουνού, χωρίς να αλλάζετε υψόμετρο, όπου η πλαγιά (επιφάνεια) του βουνού είναι το γράφημα της $f$.




Άσκηση (SOS): Μελετήστε τις $f,g$ ως προς συνέχεια διαφ. μερική διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα κατά κατεύθυνση, συνεχή -//-, και σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τις, μερικές παράγωγοι, παράγωγος, κλίση, κατεύθυνση παράγωγο, εφαπτόμενο επίπεδο γράφημα, εικόνα, σύνολα στάθμης, και διαπιστώστε (επιβεβαιώστε) τις παρατηρήσεις σχετικά με κλίση, παρ. κ' κατευθ. εφαπτόμενες ευθείες και εφαπτ επίπεδα όπου:

- $f(x,y) = x^2+y^2 \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$
- $g(x,y) = r^2-x^2-y^2, \; r>0, \; x^2+y^2 \le r$